数理解析研究所講究録
849巻 1993年 40-48

Subfactors and topological invariants

河東泰之 （東大・数理科学）

（河野美文 （佐賀大・理）
佐野隆志 （九大・理））記

Jonesにより．作用素環論の指数理論に基いて与えられたknotsに対する不変量（Jones多項式）の．3次元topological version，つまり．3次元closed manifoldsに対する不変量が．多くの人々によって導入された。ここでは．（C値）Turaev-Viro型不変量を与える"quantum 6j-symbol"と．指数理論で．subfactorsの分類に現れる代数的（complete）不変量"paragroup"（'87．Ocneanu）との同等性（'91．Ocneanuにより主張）の一部について触れる。（Evans-Kawahigashi（後述）参照。）

なお．3次元compact多様体が．境界を持つ場合は．Atiyahの意味での（2+1）-dimensional topological quantum field theoryを与える。

指数理論は．$N \subseteq M$（無限次元単純作用素環）の組を対象とする。群論での指数$[G:H]$（$G \supseteq H$）の対応物が．Jones index $[M:N]$であり．また体論でのガロア理論を期待し．何らかの"量子化"されたガロア群 = paragroup と見る。

1) まず，factor（hyperfinite II_1-factor ＝ 有限次元環の増大列の閉包）と subfactor の組の例を与える。

① $M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots$ （無限テンソル積．埋め込みは $M_2(\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} a & & b & \\ & a & & b \\ c & & d & \\ & c & & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C})$ 等）の，（自然なトレースによる GNS 表現での）閉包は，hyperfinite II_1-factor を与える。

$$M := (M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots) \text{ の閉包}$$
$$\text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}$$
$$N := (\ \mathbb{C} \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots\ ) \text{ の閉包}$$

の組は，本質的に，$M_2(\mathbb{C}) \supseteq \mathbb{C}$ なる包含関係だから，

$[M:N] = 4$ （行列環 $M_2(\mathbb{C})$ を $M_n(\mathbb{C})$ にする時も同様に hyperfinite II_1-factor を与え，$[M:N] = n^2$ となる。）

② 群・部分群 $G \supseteq H$ の，群環 $\mathbb{C}[G] \supseteq \mathbb{C}[H]$ の，ある種の閉包 "$M \supseteq N$" の index $[M:N] = [G:H] \in \mathbb{N}$ となる。

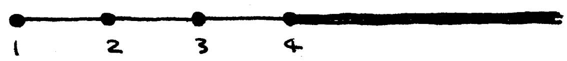
③ Jones relation（Temperly-Lieb）

$$\begin{cases} e_i^* = e_i = e_i^2 & (* \text{ は involution}) \\ e_i e_j = e_j e_i & (|i-j| > 1) \\ e_i e_{i\pm1} e_i = \tau e_i \end{cases}$$

が与えられた時，

$$M := \langle e_1, e_2, e_3, \cdots \rangle \text{ の閉包}$$
$$\text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}$$
$$N := \langle e_2, e_3, \cdots \rangle \text{ の閉包}$$

に対して Jones index は $[M:N] = \tau^{-1}$ である。
(A ($\fallingdotseq \langle e_1, e_2, e_3, \cdots \rangle$ で(代数的に)生成された algebra)
は、A上 左掛算 で作用する。空間A上には、トレースから決まる
Hilbert space の構造が入る。 また トレースの positivity から、
$\tau < \frac{1}{4}$ or $= \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{n}}$ 。) $M \cong N$ は hyperfinite
II_1-factor になっている。(有限次元近似環として、$\langle e_1, \cdots, e_m \rangle$。)



(指数値の分布)

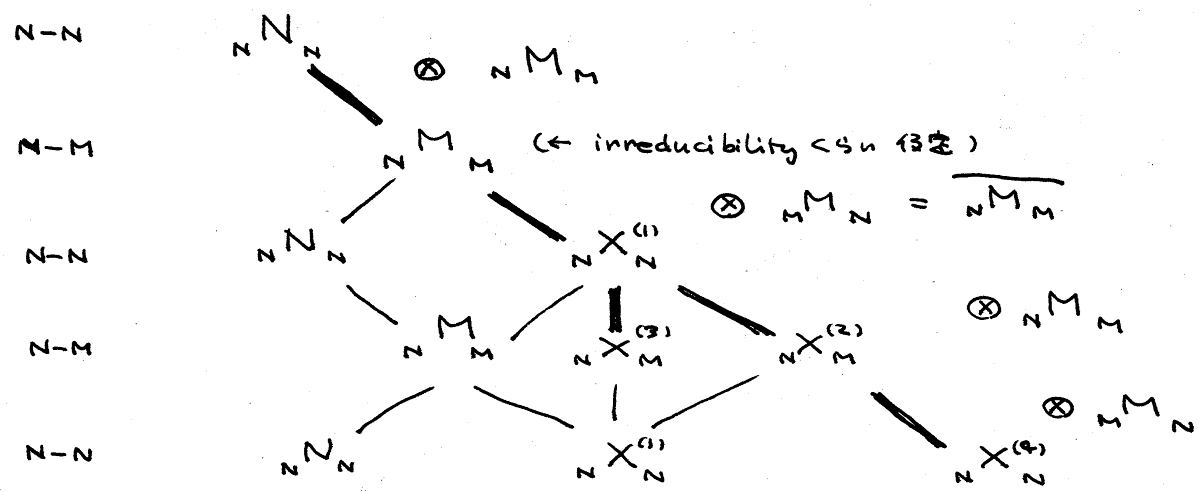
Jones subfactor は、canonical construction (paragroup) で構成され、 WZW $SU(2)_k$ model、 可解格子模型 (Andrews-Baxter-Forrester) や、 quantum 6j-symbol for $U_q(sl(2))$ (Kirillov-Reshetikhin) との対応がある。

Dynkin	A_n型	D_n型
○ 格子模型	ABF	$\forall n$. O.K.
○ 作用素環 (quantum 6j-symbol paragroup)	Jones	n even O.K. n odd. impossible
○ RCFT (Moore-Seiberg の公理の意味での)	WZW $SU(2)$	any n impossible

しかし、上記のように、常に対応するとは限らない。

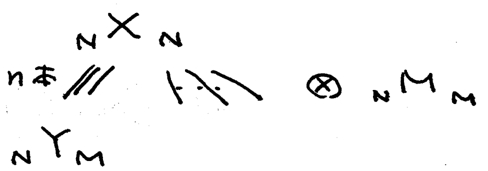
2) 次に paragroup について述べる (bimodule approach)

$N \subseteq M$ を hyperfinite II_1-factors ($[M:N] < +\infty$) とする。Mを、左N 右M-module とみる。(表現論でのアナロジー：コンパクト群の unitary 表現から、(作用素環の) 2つの作用をもつ bimodules を考える (Connes)。)



上図は、テンソル積に関する既約加群への分解である。

例えば、



は、

$${}_NX_N \otimes {}_NM_M = n \cdot {}_NY_M \oplus \cdots$$ を意味する。

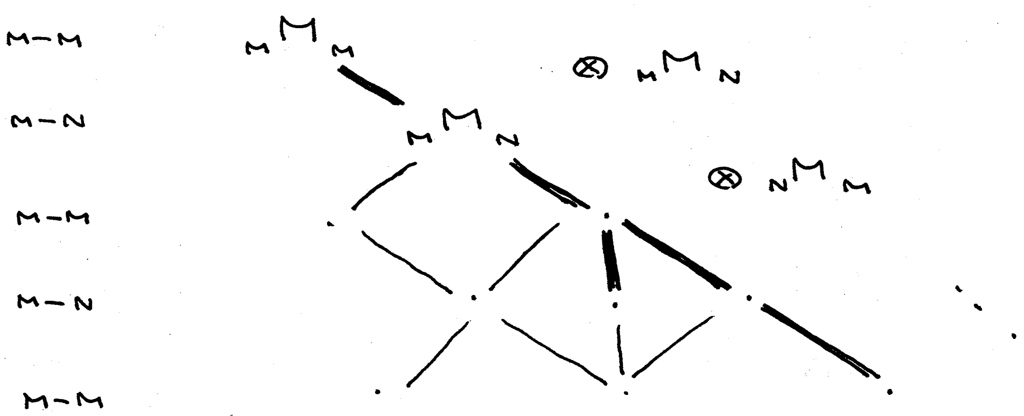
(事実として、${}_NX_N \otimes {}_NM_M \otimes {}_MM_N = {}_NX_N \oplus \cdots$

詳しくは、${}_NX_N \otimes {}_NM_M = {}_NY_M \oplus \cdots$ の時、

${}_NY_M \otimes {}_MM_N = {}_NX_N \oplus \cdots$ が成立 (Frobenius-reciprocity)。

前図での 太線 — 部分が、 $M \supseteq N$ の principal graph と呼ばれる。(Jones) principal graph が finite graph (つまり、bimodules が有限系)の時、finite depth, infinite graph の時、infinite depth と言う。(後者が "generic") (finite depth の時、paragroup は、complete invariant)

また同様に、次のグラフ (dual principal graph) も考えられる。



(ここの例では、両方 E_6)。なお、principal graph が finite depth であることは、dual principal graph のそれと、同値である。

さて、graphs が finite depth の時、4種類 N−N, N−M, M−N, M−M bimodules の、有限系が得られる。ここに fusion algebra が現れる。(${}_N X_M \otimes {}_N Y_M = 0$ 等、適宜解釈する。) involution は、contragradient module で (例: ${}_N X_M \longrightarrow {}_M \overline{X}_N$) 定義され、一般には、非可換な

algebra となる。（例： 非可換群から作られる組）

[graphs の例]

$(\text{Jones index})^{\frac{1}{2}}$ = Perron-Frobenius eigenvalue of principal graph なので、index < 4 の時、P.F. eigenvalue < 2。この時、グラフ論から principal graph としては、A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 が考えられる。（実際は、A_n (Jones subfactor), D_{2n}, E_6, E_8 が現れる。）

paragroup は、上で考えた fusion algebra (of bimodules) と、次の 6j-symbol の組と、考えられる。 6つの bimodules A, B, C, D, X, Y に対し、Intertwiners（各々、正規直交化した basis から選ぶ）の、composition（$\circlearrowleft$）から定まるスカラー（$\in \mathbb{C}$）を対応づける。

$$
\begin{tikzcd}
 & X \otimes A \otimes Y \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
X \otimes B \arrow[dr] & & C \otimes Y \arrow[dl] \\
 & D &
\end{tikzcd}
$$

(6j-symbol)

3) ここでは、quantum 6j-symbol が満たす3公理と、Turaev-Viro の不変量性を保証する3公理の対応について述べるが、2つは明らかに同等で、残り1つに関してが微妙である。

Turaev-Viro は、3-manifold（境界なし）に対する triangulation（tetrahedras への分解）に対し、quantum

6j-symbol を用いて、不変量を定義した。ここでは、tetrahedra の辺に、bimodule、面に intertwiner の、admissible な配置を考え、対応する 6j-symbol を、前のように定義する。

この時、

$$(\text{weight})^{(\#\text{ vertices})} \times \sum_{\substack{\text{admissible}\\ \text{assignment}}} \prod \left(\begin{matrix}\text{weight}\\ \text{for bimodule}\end{matrix}\right) \prod_{\diamond} (6j\text{-symbol})$$

が、Turaev-Viro 型 topological invariant になる条件を考える。要請は、

- well-defindness ($\Leftrightarrow$ tetrahedral symmetry)
- 3-local moves による不変性 (Turaev-Viro)
  (move Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ)
  ($\underset{\text{同値}}{\Leftrightarrow}$ Alexander moves による不変性)

である。

① <u>unitarity</u> of

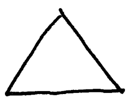
$$\begin{tikzcd} & X\otimes A\otimes Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X\otimes B \arrow[dr] & \circlearrowleft & C\otimes Y \arrow[dl] \\ & D & \end{tikzcd}$$

(intertwiners のなす正規直交基に関するユニタリー条件)

$\underset{\text{対応}}{\Longleftrightarrow}$

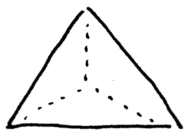
<u>invariance</u> under

move Ⅰ :



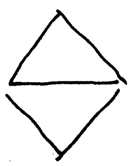
triangle

$\longleftrightarrow$



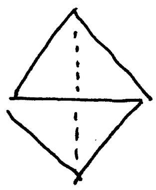
2 tetrahedra

move Ⅱ :



2-triangles

$\longleftrightarrow$



2 tetrahedra

② renormalization $\underset{\text{対応}}{\Longleftrightarrow}$ tetrahedral symmetry

$\updownarrow$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X\otimes A\otimes Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X\otimes B \arrow[dr] & & C\otimes Y \arrow[dl] \\ & D & \end{tikzcd} \quad と \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \overline{X}\otimes C\otimes Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A\otimes Y \arrow[dr] & & \overline{X}\otimes D \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

(约90°回転)

の2つの 6j-symbols 間の関係 (Frobenius-reciprocity)

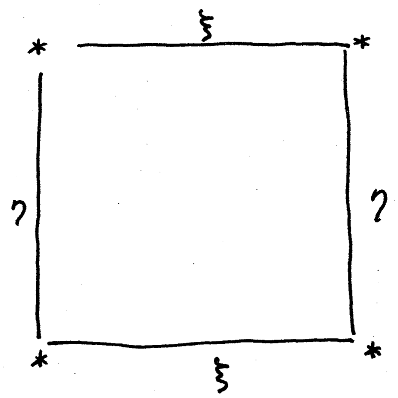
(注) connection での 対応する 条件

(crossing symmetry, commuting square condition) は,
(lattice model)

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ c & \longrightarrow & d \end{array} = \overline{\begin{array}{ccc} b & \longrightarrow & d \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & \longrightarrow & c \end{array}} \sqrt{\frac{\mu(b)\,\mu(c)}{\mu(a)\,\mu(d)}}$$

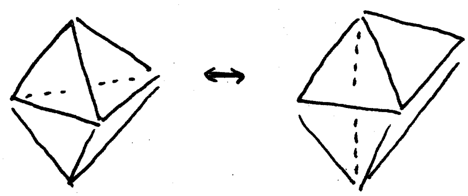
③ flatness $\underset{\text{対応}}{\Longleftrightarrow}$ Pentagon

$\updownarrow$ def. Move III での不変性



$= 1$

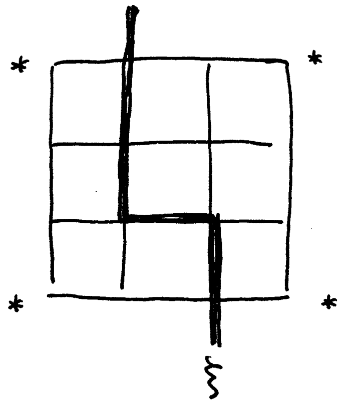
$* = {}_N N_N$ or ${}_M M_M$



2 tetrahedras 3 tetrahedras

これについて. (flatness $\underset{\text{自明}}{\Rightarrow}$) 3×3 flatness $\Longleftrightarrow$ pentagon

を考える。

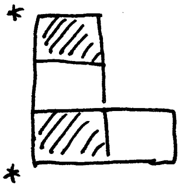
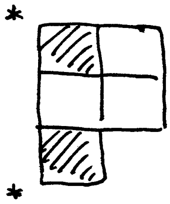
1 =  $\Longleftrightarrow$ $\sum a_\xi \overline{b_\xi} = 1$

これと、unitarity

$\sum |a_\xi|^2 = \sum |b_\xi|^2 = 1$

より、$a_\xi = b_\xi$ (Cauchy - Schwartz inequality)。

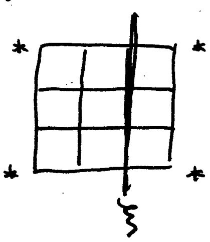
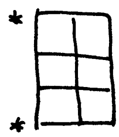
つまり、絵でかけば、

 = 

斜線部 "  = 1 (essentially) " に注意すれば、

左辺 ($\leftrightarrow$ 2 tetrahedras) = 右辺 ($\leftrightarrow$ 3 tetrahedras)

つまり、Move III 不変性と同値である。

(3×3 - flatness $\to$ flatness は、 に関して、前と同様にして  =  が示され、これより帰納的に 3×n flatness が従う。)

topological invariant から、subfactor を得る逆手法等を含め、詳しくは、下記論文を参照して下さい。

D.E. Evans & Y. Kawahigashi,
From subfactors to 3-dimensional topological quantum field theories and back, preprint.